JOQARI YARIM TEGISLIK USHIN KARLEMAN FORMULASI

Karimboyev Jahongir
QDU Assistenti

Quromboeva Gulbahor
QDU Magistranti

Biz formulanı payda etiwde isletken Karleman ideyasın qollay otırıp, G.M. Goluzin ha'm V.I. Krılovlar [2], bul formulanı tegislikte qa'legen bir baylamlı shegaralang'an oblastda jaramlı etiw jolın ko'rsetti. Biraqta bir baylamlı bolmag'an oblastlarda yamasa ken'islikte bunday formulanı payda etiwde Karleman ideyası jaramlı emes edi.

Sonday bolsa da basqa da jollar, matematikalıq ideyalardı isletiw arqalı ken'islikte ha'r tu'rli oblastlar ushın belgili matematikler L.A. Ayzenberg, A.M. Kıtmanov, N.N. Tarxanovlar ta'repinen ko'plegen Karleman formulaları alıng'an. Bul maqalada mine usı jumıslardın' bir qanshası u'yrenilip shıg'ıldı. Olarda qollanılg'an usıllar ha'm ideyalardan paydalana otırıp, joqarı yarım tegislik ushın Karleman formulasının' bir ko'rinisi payda etildi.

Meyli $M \subset R^1 = \partial \Pi$ ko'plik Lebeg on' o'lshemine iye bolsın. Puasson integralın qarastırayıq,

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi_M(t)\,y\,dt}{(x-t)^2+y^2} \tag{1}$$

bul integral Π yarım tegislikte u on' garmonikalıq funktsiyanı anıqlaydı. Eger

$$\int_M \frac{dt}{1+|t|} < \infty \tag{2}$$

bolsa, onda u funktsiyag'a tu'yinles v funktsiyanı to'mendegishe du'ziw mu'mkin.

$$v(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-t)\,\chi_M(t)\,dt}{(x-t)^2+y^2}$$

Eger (2) orınlı bolmasa, onda bir qansha quramalı formulanı qollanıw kerek.

$$v(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x-t}{(x-t)^2+y^2} + \frac{t}{t^2+1} \right) \chi_M(t)\,dt$$

Qanday jag'dayda da biz Karleman ideyasın a'melge asırıw ushın «so'niwshi» funktsiya bolatug'ın $\varphi(z)=\exp(u+iv)$ golomorf funktsiyasın alamız. Sonı aytıp o'tiw kerek $\varphi \in H^{\infty}(\Pi)$ ha'm $1<|\varphi(z)|<e$ bunda $z\in\Pi$.

Teorema 1. Eger $f\in H^{p}(\Pi)$, $1\le p<\infty$ ha'm $M\subset R^{1}=\partial\Pi$ on' Lebeg o'lshemine iye bolsa, onda $\forall z\in\Pi$ noqatı ushın Π dag'ı kompaktlarda ten' o'lshemli jıynaqlı

$$f(z)=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{M} f(t)\left[\frac{\varphi(t)}{\varphi(z)}\right]^{m}\frac{dt}{t-z} \tag{3}$$

Karleman formulası orınlı.

Teorema 2. Eger $f\in H^{p}(\Pi)$, $1\le p\le\infty$ ha'm M on' Lebeg o'lshemine iye bolsa, onda $z\in\Pi$ noqatı ushın Π dag'ı kompaktlarda ten' o'lshemli jıynaqlı ha'm

$$f(z)=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{M} f(z)\left[\frac{\varphi(t)}{\varphi(z)}\right]^{m}\frac{y\,dt}{(x-t)^{2}+y^{2}} \tag{7}$$

Karleman formulası orınlı boladı.

Endi biz joqarı yarım tegislik ushın Karleman formulasın qarastırayıq.

Meyli $f\in H(\Pi)$ bolsın. Bunnan $f\left(i\frac{1-\omega}{1+\omega}\right)\in H^{p}$ bolsa, onda

$$\frac{f(z)}{(z+i)}\in H^{p}(\Pi)\quad,\quad 1\le p\le\infty \tag{8}$$

orınlı.

Teorema 3. Eger $f\in H(\Pi)$ ha'm $M\subset R^{1}$ Lebeg on' o'lshemine iye bolsa, onda to'mendegi formula orınlı:

$$f(z)=\lim_{m\to\infty}\frac{z+i}{2\pi i}\int_{M} f(t)\left[\frac{\varphi(t)}{\varphi(z)}\right]^{m}\frac{dt}{(i+t)(t-z)} \tag{9}$$

Teorema 4. Meyli M on' Lebeg o'lshemine iye bolsın, sonda

$$\lim_{m\to\infty}\frac{z+i}{2\pi i}\int_{M} f(t)\left[\frac{\varphi(t)}{\varphi(z)}\right]^{m}\frac{dt}{(i+t)(t-z)}=J(z) \tag{11}$$

Saldar: Usı teoremanın' sha'rtleri orınlansa ha'm M ko'pligi shekli bolsa, onda

$$f(\infty) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_M f(t)\left[\varphi(t)\right]^m \frac{dt}{t+i} \tag{13}$$

formulasının' da'lilleniwinen ha'm teorema 4 ten shekli M ko'pligi ushın

$$\varphi(z) = \exp \frac{1}{\pi i} \int_M \frac{dt}{t-z} \tag{14}$$

ten'ligi orınlı bolatug'ınlıg'ı kelip shıg'adı. haqıyqatında da bul ten'likte $\varphi(\infty)=1$

Mısal: Meyli $[a,b]=M$ bolsın, onda

$$\frac{i}{\pi} \int_M \frac{dt}{z-t} = \frac{1}{\pi i} \ln \frac{z-b}{z-a} = \psi(z)$$

bo'lektin' garmonikalıq o'lshemin belgileymiz, yag'nıy $\mathrm{Re}\,\psi(z)$ mu'yeshke ten'. Demek, bunnan bul bo'lek z noqattan bo'lingen π ge.

Bunnan

$$\varphi(z) = \exp\psi(z) = \left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\frac{1}{\pi i}}$$

ha'm $f \in H^p(\Pi)$, $1 \le p < \infty$ ushın

$$f(z) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_a^b f(t) \left[\frac{(t-b)(z-a)}{(t-a)(z-b)}\right]^{\frac{m}{\pi i}} \frac{dt}{t-z} \tag{15}$$

Karleman formulası orınlı.

Paydalanılg'an a'debiyatlar:

1. A.M. Кытманов, Т.Н. Никитина «Аналоги формулы Карлемана для классических областей» Крас.Г.У. Мат.заметки.
2. Г.М. Голузин, В.И. Крылов «Обобщенная формула Карлемана и ее приложение к аналитическому продолжению функции» Крас.Г.У. Мат.сб.