BARQAROR TARAQQIYOT VA RIVOJLANISH TAMOYILLARI
VOLUME: 3 ISSUE: 2
RESPUBLIKA ILMIY-AMALIY KONFERENSIYASI
www.uzresearchers.com

О ГОЛОМОРФНОМ ПРОДОЛЖЕНИИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ ВДОЛЬ КОНЕЧНОГО СЕМЕЙСТВА КОМПЛЕКСНЫХ ПРЯМЫХ В ШАРЕ

Кутлымуратов Б.Ж.
стар. преп. Каракалпакский государственный университет им. Бердаха

Рахимбоева Рисолат
магитрант Каракалпакский государственный университет им. Бердаха

В данном работе мы рассмотрим семейство комплексных прямых, проходящих через $(n+1)$ точек, лежащих в шаре B пространства $\mathbb{C}^n$. Обладающий свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль семейства комплексных прямых. Мы покажем, что для голоморфного продолжения функций в шаре семейство комплексных прямых, проходящих через $(n+1)$ точек внутри области, является достаточным.

Пусть B – единичный шар в $\mathbb{C}^n$ $(n>1)$ с центром в нуле, $S=\partial B$ граница шара. Напомним определение класса функций $H^p(B)$.

Голоморфная функция $f \in H^p(B)\,(p>0)$, если

$$\sup_{\varepsilon>0}\int_S \left| f(\varsigma-\varepsilon v(\varsigma))\right|^p d\sigma < +\infty,$$

где $d\sigma$ – элемент поверхности ∂B, а $v(\varsigma)$– единичный вектор внешней нормали к поверхности ∂B в точке ς. Хорошо известно, что нормальные граничные значения функции $f \in H^p(B)$ принадлежат классу $L^p(\partial B)$ (по мере $d\sigma$).

Рассмотрим, как и выше одномерные комплексные прямые l вида

$$l=\{\varsigma : \varsigma_j = z_j + b_j t,\ \ j=1,\dots,n,\ \ t\in\mathbb{C}\}, \tag{1}$$

проходящие через точку $z\in\mathbb{C}^n$ в направлении вектора $b\in\mathbb{C}\mathbf{P}^{n-1}$. Тогда, если $f\in L^p(S)$, то для почти всех $z\in B$ и почти всех $b\in\mathbb{C}\mathbf{P}^{n-1}$ функция $f\in L^p(S\cap l)$.

Напомним, функция $f \in L^p(S), p \geq 1$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексной прямой l $(l \cap S \neq \varnothing)$, если существует функция f_1 со следующими свойствами

a) $f_1 \in H^p(B \cap l)$

b) нормальные граничные значения функции f_l почти всюду совпадают с f на множестве $S \cap l$.

Будем говорить, что функция $f \in L^p(S)$ *обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль некоторого семейства* L, если она обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль любой комплексной прямой $l \in L$. И, наконец, назовем множество L *достаточным для голоморфного продолжения*, если из того, что $f \in L^p(S)$ обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль всех комплексных прямых из семейства L следует, что функция f голоморфно продолжается в B (т. е. f является CR-функцией на S).

Рассмотрим ядро вида

$$Q(z, w, \zeta) = c_n \frac{\left(1 - \langle z, w \rangle\right)^n}{\left(1 - \langle z, \bar{\zeta} \rangle\right)^n \left(1 - \langle \zeta, w \rangle\right)^n} \tag{2}$$

Очевидно, что $Q(z, \bar{z}, \zeta) = P(z, \zeta)$, где

$$P(z, \zeta) = c_n \frac{\left(1 - |z|^2\right)^n}{\left|1 - \langle z, \bar{\zeta} \rangle\right|^{2n}} = c_n \frac{\left(1 - \langle z, \bar{z} \rangle\right)^n}{\left(1 - \langle z, \bar{\zeta} \rangle\right)^n (1 - (\zeta, \bar{z})^n}$$

инвариантное ядро Пуассона **[1]** и $c_n = \dfrac{(n-1)!}{2\pi^n}$, $\langle z, \zeta \rangle = z_1\zeta_1 + ... + z_n\zeta_n$. Введем функцию

$$\Phi(z, \omega) = \int_S f(\zeta) Q(z, w, \varsigma) d\sigma(\zeta),$$

которая голоморфна по переменным (z, w) в $B \times B \subset \mathbb{C}^{2n}$, поскольку при $\zeta \in S$ и $z, w \in B$ знаменатель ядра (2) не обращается в ноль. Отметим, что $\Phi(z, \bar{z}) = F(z)$ а производные

$$\left.\frac{\partial^{\alpha+\beta}\Phi}{\partial z^{\alpha}\partial w^{\beta}}\right|_{\omega=\bar{z}}=\frac{\partial^{\alpha+\beta}F}{\partial z^{\alpha}\partial \bar{z}^{\beta}} \tag{3}$$

где

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}\Phi}{\partial z^{\alpha}\partial w^{\beta}}=\frac{\partial^{\alpha_1+...+\alpha_n+\beta_1+....+\beta_n}\Phi}{\partial z_1^{\alpha_1}.....\partial z_n^{\alpha_n}\partial w_1^{\beta_1}....\partial w_n^{\beta_n}}$$

и $\alpha=(\alpha_1,....\alpha_n)$, $\beta=(\beta_1....\beta_n)$ – мультииндексы.

Обозначим через L_a совокупность комплексных прямых, проходящих через точки a, а через $L_{a,b,c,...}$ объединение $L_a \cup L_b \cup L_c \cup ...$

Теорема 1. Пусть функция $f \in L^p(S)$ *обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль* семейства L_0, *тогда для интеграла*

$$\Phi(z,w)=\int_S f(\zeta)Q(z,w,\varsigma)d\sigma(\zeta),$$

справедливы $\Phi(0,w)=\mathrm{const}$ и $\left.\frac{\partial^{\alpha}\Phi(z,w)}{\partial z^{\alpha}}\right|_{z=0}$ – *многочлен по* ω *степени не выше* $\|\alpha\|$.

Напомним, что автоморфизм шара $\varphi_\alpha(u)$, переводящая точку $a \in B$ в 0 имеет вид

$$z=\varphi_\alpha(u)=\frac{\alpha-\frac{\langle u,\bar{a}\rangle}{\langle a,\bar{a}\rangle}a-\sqrt{1-|a|^2}\left(u-\frac{\langle u,\bar{a}\rangle}{\langle a,\bar{a}\rangle}a\right)}{1-\langle u,\bar{a}\rangle}$$

и $\varphi_\alpha(u)$ является инволюцией, т.е. $\varphi_\alpha^{-1}=\varphi_\alpha$. И наоборот, любой автоморфизм шара имеет такой вид. Ясно, что отображение $(\varphi_\alpha(u),\varphi_{\bar{a}}(\upsilon))$ служит автоморфизмом $B\times B$, переводящим точку $(a,\bar{a})$ в точку (0,0).

Как показано в **[1]**, верно равенство

$$d\sigma(\varphi_a(\eta))=P(a,\eta)d\sigma(\eta),\ \eta\in S,$$

и согласно (2),

$$d\sigma(\varphi_a(\eta)) = P(a,\eta)d\sigma(\eta) = Q(a,\overline{a},\eta)d\sigma(\eta), \quad \eta \in S,$$

Более того, автоморфизм $\varphi_\alpha(u)$ является гомеоморфизмом шара $\overline{B}$ на себя (теореме 2.2.2 из **[1])** и

$$P(\varphi_\alpha(u),\varphi_a(\eta)) = \frac{P(u,\eta)}{P(a,\eta)}.$$

(теореме 3.3.5 из **[1]).** Поэтому

$$Q(\varphi_\alpha(u),\varphi_{\overline{a}}(\overline{u}),\varphi_a(\eta)) = \frac{Q(u,\overline{u},\eta)}{P(a,\overline{a},\eta)}. \tag{4}$$

Рассмотрим интеграл

$$\Phi(z,w) = \Phi(\varphi_a(u),\varphi_{\overline{a}}(\upsilon)) = \int_S f(\zeta)Q\left(\varphi_a(u),\varphi_{\overline{a}}(\upsilon),\zeta\right)d\sigma(\zeta).$$

Сделаем замену переменного $\zeta = \varphi_a(\eta)$ и, обозначая $f(\varphi_a(\eta)) = f_a(\eta)$ получим

$$\Phi(z,w) = \int_S f(\varphi_a(\eta))Q(\varphi_a(\mathrm{u}),\varphi_{\overline{a}}(\upsilon),\varphi_a(\eta))\mathrm{d}\sigma(\varphi_a(\eta)) =$$

$$= \int_S f(\varphi_a(\eta))\frac{Q(u,\upsilon,\eta)Q(a,\bar{a},\eta)}{Q(a,\bar{a},\eta)}d\sigma(\eta) = \int_S f_a(\eta)Q(u,\upsilon,\eta)d\sigma(\eta). \tag{5}$$

Положим, $\Phi_a(u,v) = \int_S f_a(\eta)Q(u,\upsilon,\eta)d\sigma(\eta).$

Приведем следующее утверждений.

Теорема 2. *Пусть функция $f \in L^p(S)$, точка $a \in B$, функция $\Phi(z,w)$ удовлетворяет условиям $\Phi(0,w) = const$, $\Phi(a,w) = const$ и $\frac{\partial^a \Phi(0,w)}{\partial z^a}$ – являются многочленами по $\varphi_\alpha(w)$ степени не выше чем $\|\alpha\|$. Тогда для любого фиксированного z, принадлежащего комплексной прямой из $\gamma \cap B$ справедливо $\Phi(z,w) = const$ по переменной w, $\frac{\partial^\beta \Phi(z,w)}{\partial w^\beta} = 0$, $\|\beta\| > 0$. Здесь, γ – комплексная прямая, проходящая через точек 0 и a.*

BARQAROR TARAQQIYOT VA RIVOJLANISH TAMOYILLARI
VOLUME: 3 ISSUE: 2
RESPUBLIKA ILMIY-AMALIY KONFERENSIYASI
www.uzresearchers.com

Теорема 3. Пусть $n=2$ и функция $f \in L^p(S)$ обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль семейств $L_{a,c,d}$, где $a,c,d \in B$ не лежат на одной комплексной прямой в $\mathbb{C}^2$. Тогда $\dfrac{\partial^\beta \Phi(z,w)}{\partial w^\beta}=0$ для любого $z \in B$ и $\|\beta\|>0$, а $f(\zeta)$ голоморфно продолжается в B.

Из теоремы 3 следует, что в шаре $B \subset \mathbb{C}^2$ достаточным семейством комплексных прямых, для интегрируемой функции, заданной на границе шара, является множество $L_{a,c,d}$ где a,c,d – произвольные точки из шара, не лежащие на одной комплексной прямой.

Рассмотрим теперь обшей случай пространства $\mathbb{C}^n$ и шара B в нем, $B \subset \mathbb{C}^n$. Обозначим через A множество точек $a_k \in B \subset \mathbb{C}^n$, $k=1,...,n+1$, не лежащих на комплексной гиперплоскости в $\mathbb{C}^n$.

Теорема 4. *Пусть функция* $f \in L^p(S)$ *обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль семейств* $L_A = \cup\left\{L_{ak}, k=1,2,..,(n+1)\right\}$. *Тогда для любого* $z \in B$ *и* $\|\beta\|>0$ $\dfrac{\partial^\beta \Phi(z,w)}{\partial w^\beta}=0$ *а* $f(\zeta)$ *голоморфно продолжается в* B.

Литература:

1. Рудин У. Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$.// Москва. Мир, 1984.
2. Кытманов А.М., Мысливец С.Г. Голоморфное продолжение функций вдоль конечных семейств комплексных прямых в шаре. // Журнал СФУ. Математика и физика, 2012, Т. 5, вып. 4. С 547-557.
3. Отемуратов Б.П. О функциях класса L^p со свойством одномерного голоморфного продолжения. // Вестник КрасГУ. Сер.физ.мат.науки. Красноярск. 2006. №9. С. 95-100.